RÓWNANIA KWADRATOWE

ZBIGNIEW STEBEL

Podstawy matematyki szkolnej

WAŁBRZYCH • 2012

Spis treści

1 Wstęp

W pracy niniejszej przedstawię podstawowe metody rozwiązywania równań kwadratowych w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Dlatego w zagadnieniu „ rozwiąż równanie postaci ” mamy na myśli rozpatrywanie rozwiązań tego równania w zbiorze $\mathbb{R}$.
Jeśli w zadaniu zachodzi konieczność zawężenia zbioru rozwiązań wówczas oznaczamy przez $\mathbb{Z}$ zbiór liczb całkowitych, przez $\mathbb{Q}$ zbiór liczb wymiernych i przez $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych.
W opracowaniu niniejszym nie omawiam zagadnienia pojęcia funkcji kwadratowej, jej wykresów i własności.Pomijam oznaczenie definicji wyróżnika trójmianu kwadratowego za pomocą symbolu Δ[1],chociaż pokazuję rozwiązania zadań tego typu.Pominięte zostały całkowicie równania kwadratowe z wartością bezwzględną, w których wykorzystujemy definicję wartości bezwzględnej $|x|$[2]

2 Równania stopnia drugiego

2.1 Teoria i przykłady

Równanie stopnia drugiego zwane równaniem kwadratowym ma postać

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \tag{1}$$

Współczynniki liczbowe a,b i c są rzeczywiste.
Jeśli współczymik $a = 0$ wtedy równanie jest równaniem liniowym postaci

$$b \cdot x + c = 0 \tag{2}$$

Jeśli współczynnik $a \neq 0$ wówczas możemy szukać rozwiązań równania kwadratowego.

Przykład 2.1. $3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0$, *jest równaniem,które nie ma rozwiązań w* $\mathbb{R}$

Przykład 2.2. $-\frac{2}{7} \cdot x - 5 = 0$, *nie jest równaniem kwadratowym gdyż współczynnik równania kwadratowego* $a = 0$.

Przykład 2.3. $x^2 + 6 \cdot x - 10 = 0$, *ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.*

Przykład 2.4. *Równanie postaci* $x^2 + 1 = 0$ *nie ma w ogóle rozwiązań w zbiorze* $\mathbb{R}$

Szczególne przypadki równania kwadratowego:

$$x^2 = n \tag{3}$$

[1] $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ z równania kwadratowego postaci $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

[2] Wartość bezwzględną z x definiujemy:

$$\begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Jeśli $n < 0$ wtedy pierwiastek nie istnieje w zbiorze $\mathbb{R}$
Jeśli $n = 0$ wtedy istnieje jeden pierwiastek podwójny
Jeśli $n > 0$ wtedy istnieją dwa pierwiastki czyli dwa rozwiązania równania postaci
$x_1 = -\sqrt{n}$ oraz $x_2 = \sqrt{n}$

Przykład 2.5. $x^2 = 16$ *wtedy* $x_1 = -4$ *oraz* $x_2 = 4$

Przykład 2.6. $x^2 = 3$ *wtedy* $x_1 = -\sqrt{3}$ *oraz* $x_2 = \sqrt{3}$

Przykład 2.7. $x^2 = 144$ *wtedy* $x_1 = -12$ $x_2 = 12$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0 \tag{4}$$

W tym przypadku równanie ma dokładnie dwa rozwiązania postaci:
$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$

Twierdzenie 2.1. *Pierwiastki równania kwadratowego postaci*

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

(o ile istnieją) wyznaczamy ze wzoru

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \tag{5}$$

Dowód. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) == a \cdot \left(x + 2 \cdot \frac{b}{2 \cdot a} + \frac{c}{a}\right) =$
$= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - \frac{b^2}{4 \cdot a^2} + \frac{c}{a}\right] = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 + \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a^2}\right] = 0$
Rozwiązując to równanie otrzymujemy :

$$a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}$$

Dzieląc równanie obustronnie przez $a \neq 0$ otrzymujemy:

$$\left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}$$

Obustronnie pierwiastkując pierwiastkiem stopnia drugiego otrzymujemy:

$$x + \frac{b}{2 \cdot a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Zatem otrzymaliśmy

$$x = -\frac{b}{2 \cdot a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

co należało pokazać

$\square$

2.2 Podstawowe wzory skróconego mnożenia

Przypomnijmy wzory skróconego mnożenia:
Wzór na kwadrat sumy

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + c^2 \tag{6}$$

Dowód. Z definicji potęgi otrzymujemy:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

na mocy podobieństwa jednomianów $a \cdot b$ i $b \cdot a$ □

Przykład 2.8. *Równanie kwadratowe postaci*

$$4 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = -\frac{1}{2}$ *ponieważ ze wzoru na kwadrat sumy równanie to możemy zapisać w postaci:*

$$(2 \cdot x + 1)^2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Wzór na kwadrat różnicy:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \tag{7}$$

Dowód. Z definicji potęgi otrzymujemy:

$$(a-b)^2 = a^2 - a \cdot b - b \cdot a + (-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

z podobieństwa jednomianów $-a \cdot b$ oraz $-b \cdot a$ □

Przykład 2.9. *Równanie kwadratowe postaci*

$$49 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 1 = 0$$

ma również dokładnie jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{7}$*. Równanie to ze wzoru na kwadrat różnicy możemy zapisać w postaci:*

$$(7 \cdot x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 7 \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

Wzór na różnicę kwadratów:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \tag{8}$$

Dowód.

$$(a-b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$$

po zredukowaniu wyrazów podobnych. □

Przykład 2.10. *Równanie kwadratowe postaci*

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

ma dokładnie dwa rozwiązania $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *i* $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Zauważmy,że równanie to możemy zapisać w postaci

$$x^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = (x - \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (x + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$$

Zatem pierwiatkami tego równania są
$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *oraz* $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.3 Wzory Viete'a i ich zastosowania w równaniach

Twierdzenie 2.2. *Wzory Viete'a* [3] *mają postać:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \tag{9}$$

gdzie a, b, c *są współczynnikami równania kwadratowego*

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, (a \neq 0)$$

Dowód. Załóżmy, że

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$.

Wówczas

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} - b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = -\frac{2 \cdot b}{2 \cdot a} = \frac{b}{a}$$

Z drugiej strony

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2} = \frac{c}{a}$$

□

Przykład 2.11. *Znajdźmy liczbę rozwiązań równania kwadratowego postaci*

$$x^2 - k \cdot x + k + 3 = 0$$

[3] Francois Vie'te (1540-1603) - francuski matematyki i astronom

w zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$.
Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$. Zatem

$$k^2 - 4 \cdot (k+3) > 0 \Rightarrow k^2 - 4 \cdot k - 12 > 0 \Rightarrow (k-2)^2 - 16 > 0$$

$$\Downarrow$$

$$(k-2-4) \cdot (k-2+4) > 0 \Rightarrow (k-6) \cdot (k+2) > 0$$

Zatem dla $k \in (-\infty, -2) \cup (6, \infty)$ równanie ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste.
Równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie gdy

$$(k-6) \cdot (k+2) = 0$$

więc dla $k_1 = -2$ i $k_2 = 6$.
Równanie nie ma pierwiastków w zbiorze $\mathbb{R}$ ani w żadnym jego podzbiorze gdy spełniona jest nierówność

$$(k-6) \cdot (k+2) < 0$$

Zatem dla $k \in (-2, 6)$ równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Przykład 2.12. *Dla jakiej wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ równanie postaci*

$$(k+2) \cdot x^2 - 4 \cdot k \cdot x + 4 \cdot k - 1 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze $\mathbb{R}$
Dla $k = -2$ równanie kwadratowe zmienia się na równanie liniowe postaci:

$$-4 \cdot k \cdot x + 4 \cdot k - 1 = 0$$

Rozwiążmy to równanie

$$-4 \cdot (-2) \cdot x + 4 \cdot (-2) - 1 = 0 \Rightarrow 8 \cdot x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{8}$$

Załóżmy teraz, że $k \neq -2$, czyli dla równania kwadratowego musi być spełniony dodatkowy warunek

$$16 \cdot k^2 - 4 \cdot (k+2) \cdot (4 \cdot k - 1) = 0$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy równanie

$$-28 \cdot k + 8 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

Zatem równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $k = -2$ lub $k = \frac{2}{7}$.

3 Metody rozwiązywania równań kwadratowych

3.1 Zapisywanie lewej strony równania kwadratowego w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego

Rozpatrzmy równanie kwadratowe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \quad a \neq 0$$

Jeśli równanie to ma pierwiastki wymierne wtedy można je rozwiązywać korzystając z następującego alorytmu:

Algorytm 3.1. *Jeśli w zapisie lewej strony równania kwadratowego*

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[dr] & c_1 \\ a_2 \arrow[ur] & c_2 \end{tikzcd}$$

zachodzą zależności postaci

$$y = \begin{cases} a_1 \cdot a_2 = a \\ c_1 \cdot c_2 = c \\ a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_1 = b \end{cases}$$

to wówczas równanie kwadratowe możemy zapisać w postaci:

$$(a_1 \cdot x + c_1) \cdot (a_2 \cdot x + c_2) = 0 \tag{10}$$

Dowód. Podstawiając odpowiednie zależności do rẃnania kwadratowego otrzymujemy

$$a_1 \cdot a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot c_2 \cdot x + a_2 \cdot c_1 \cdot x + c_1 \cdot c_2 = 0$$

i grupując odpowiednie wyrazy otrzymujemy:

$$(a_1 \cdot x + c_1) \cdot (a_2 \cdot x + c_2) = 0$$

co należało pokazać.

□

Przykład 3.1. *Rozwiązać równanie postaci:*

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 1 \\ 1 \arrow[ur] & -2 \end{tikzcd}$$

stąd

$$(a_1 \cdot x + c_1) \cdot (a_2 \cdot x + c_2) = (x + 1) \cdot (x - 2) = 0$$

Stąd $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$. *Zatem* $x_1 = -1$ *i* $x_2 = 2$
Sprawdzenie:

$$a_1 \cdot a_2 = 1 \cdot 1 = 1 = a$$
$$c_1 \cdot c_2 = 1 \cdot (-2) = -2 = c$$
$$a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 = -2 + 1 = -1 = b$$

Przykład 3.2. *Rozwiązać równanie postaci:*

$$6 \cdot x^2 - x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{array}$$

Zatem $(2 \cdot x + 1) \cdot (3 \cdot x - 2) = 0$
Stąd otrzymujemy rozwiązanie: $x = -\frac{1}{2}$ *i* $x = \frac{2}{3}$
Sprawdzenie:

$$a_1 \cdot a_2 = 2 \cdot 3 = 6 = a$$
$$c_1 \cdot c_2 = 1 \cdot (-2) = -2 = c$$
$$a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_1 = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -1 = b$$

Przykład 3.3. *Rozwiązać równanie postaci:*

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{array}$$

Zatem $(x - 4) \cdot (x + 3) = 0$ *stąd* $x_1 = -3$ *i* $x_2 = 4$
Sprawdzenie:

$$a_1 \cdot a_2 = 1 \cdot 1 = 1 = a$$
$$c_1 \cdot c_2 = (-4) \cdot 3 = -12 = c$$
$$a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_1 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) = -1 = b$$

Przykład 3.4. *Rozwiązać równanie postaci:*

$$3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 9 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 3 & -3 \\ 1 & 3 \end{array}$$

Zatem $(3 \cdot x - 3) \cdot (x + 3) = 0$, *czyli* $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

3.2 Rozwiązywanie równań z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia

Metodę rozwiązywania równań kwadratowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia zilustrujemy na przykładach

Przykład 3.5. *Rozwiązać równanie kwadratowe*

$$x^2 - 16 = 0$$

Ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$x^2 - 4^2 = 0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x - 4 = 0,\ \ x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4,\ \ x_2 = 4$$

Przykład 3.6. *Rozwiązać równanie kwadratowe*

$$4 \cdot x^2 + 9 = 12 \cdot x$$

Rozwiążmy równanie postaci

$$4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 = 0$$

Ze wzoru na kwadrat różnicy mamy

$$(2 \cdot x - 3)^2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

czyli równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie (pierwiastek podwójny)

Przykład 3.7. *Rozwiązać rwnanie kwadratowe*

$$x^2 - 5 \cdot x + 10 = 0$$

Ze wzoru na kwadrat różnicy otrzymujemy

$$(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 10 = 0$$

$$(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{15}{4} = 0$$

Ostatnie równanie nie jest prawdziwe w zbiorze $\mathbb{R}$ gdyż kwadrat dowolnej liczby jest liczbą nieujemną,a suma liczby dodatniej i nieujemnej jest dodatnia a nie równa zero.

Przykład 3.8. *Rozwiązać równanie kwadratowe*

$$7 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 7 = 0$$

Wystarczy podzielić to równanie obustronnie przez 7 *wtedy otrzymujemy*

$$x^2 - 2 \cdot x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

więc równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Przykład 3.9. *Rozwiązać równanie kwadratowe*

$$100 \cdot x^2 + 200 \cdot x + 100 = 0$$

Równaniem równoważnym do danego jest

$$x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0$$

Ze wzoru na kwadrat sumy

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

czyli jedno rozwiązanie.

Przykład 3.10. *Rozwiązać równanie kwadratowe*

$$x^2 + 3 \cdot x - 2 = 0$$

Ze wzoru na kwadrat sumy

$$(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 2 = 0$$

zatem oczywistym jest,że

$$(x + \frac{3}{2})^2 = \frac{17}{4}$$

Pierwiastkując równanie pierwiastkiem stopnia 2 *mamy*

$$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}$$

Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, \ \ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

Przykład 3.11. *W jednym z dzieł słynnego matematyka* ***Diofantosa*** *znajduje się zadanie:*
suma dwóch liczb naturalnych wynosi 20, a suma kwadratów tych liczb 208. Jakie to liczby?
Załóżmy, że $x, y \in \mathbb{N}$. *Z treści zadania wynikają dwa równania:*
$x + y = 20$ *oraz* $x^2 + y^2 = 208$, *czyli układ równań.*
Metoda ze wzorów skróconego mnożenia

$$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \Rightarrow 20^2 = 208 + 2 \cdot x \cdot y$$

Zatem $2 \cdot x \cdot y = 20^2 - 208 = 400 - 208 = 192$, *czyli* $x \cdot y = 96$.
Dzielnikami naturalnymi liczby 96 *są:*$\{1, 96, 2, 48, 3, 32, 4, 24, 6, 16, 8, 12\}$
Ponieważ z treści zadania suma liczb jest parzysta oraz z ostatniego równania iloczyn liczb jest parzysty więc szukane liczby muszą być parzyste.

Spośród czterech par liczb parzystych tylko jedna para liczb spełnia wyjściowe równania, mianowicie $x = 8$ i $y = 12$.
Istotnie, bowiem $8 + 12 = 20$ i $8^2 + 12^2 = 64 + 144 = 208$.
Sprowadzamy układ równań do równania kwadratowego
Wyznaczamy y z pierwszego równania i podstawiamy w miejsce y do drugiego równania, otrzymamy wówczas

$$x^2 + (20 - x)^2 = 208 \Rightarrow x^2 + 400 - 40 \cdot x + x^2 = 208 \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 192 = 0$$

Dzieląc równanie obustronnie przez 2 otrzymujemy

$$x^2 - 20 \cdot x + 96 = 0$$

Z treści zadania wynika, że $x \in \mathbb{N}$.Przepiszmy to równanie w postaci

$$x^2 - 20 \cdot x = -96 \Rightarrow x \cdot (x - 20) = -96$$

Sprawdzamy, które z dzielników naturalnych liczby -96 spełnia to równanie.
Okazuje się,że dla $x = 8$ równanie jest spełnione. Istotnie

$$8 \cdot (8 - 20) = 8 \cdot (-12) = -96$$

Podstawmy teraz nasze rozwiązanie do równania wyjściowego

$$8^2 - 20 \cdot 8 + 96 = 0$$

Zatem otrzymujemy:

$$x^2 - 20 \cdot x + 96 = x^2 - 20 \cdot x + 96 - (8^2 - 20 \cdot 8 + 96) = 0$$

$$x^2 - 8^2 - 20 \cdot x - 20 \cdot 8 = 0 \Rightarrow (x - 8) \cdot (x + 8) - 20 \cdot (x - 8) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x - 8) \cdot (x + 8 - 20) = 0 \Rightarrow (x - 8) \cdot (x - 12) = 0 \Rightarrow x = 8, \quad x = 12$$

Można był znaleźć wprost drugie rozwiązanie podstawiając kolejne dzielniki naturalne liczby -96.

3.3 Różne metody rozwiązywania równań kwadratowych

Przykład 3.12. *Rozwiązać równanie postaci:*

$$7 \cdot x^2 - (2 \cdot x - 3) \cdot (2 \cdot x + 3) - (x - 4)^2 = 3$$

Przekształcamy to równanie do postaci ogólnej równania kwadratowego:
Ze wzorów na różnicę kwadratów i kwadrat różnicy otrzymujemy

$$7 \cdot x^2 - (4 \cdot x^2 - 9) - (x^2 - 8 \cdot x + 16) = 3$$

Po usunięciu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie:

$$2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 10 = 0$$

Dzieląc obustronnie to równanie przez 2 otzymujemy:

$$x^2 + 4 \cdot x - 5 = 0$$

czyli równanie kwadratowe postaci

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Równanie zapiszmy w postaci $x^2 + 4 \cdot x = 5 \Rightarrow x \cdot (x + 4) = 5$
Dzielniki wyrazu wolnego to $\{-1, 1, -5, 5\}$. *Sprawdzamy teraz, która z tych liczb jest pierwiastkiem naszego równania.*
Dla $x_1 = 1$ *mamy* $1 \cdot (1 + 4) = 5$. *Zatem podstawiając do równania wyjściowego mamy:* $1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 0$. *Jeśli od pewnego wyrażenia odejmiemy zero to otrzymamy to samo wyrażenie,zatem*

$$x^2 + 4 \cdot x - 5 = x^2 + 4 \cdot x - 5 - (1^2 + 4 \cdot 1 - 5) = x^2 - 4 \cdot x - 4 - 1^2 = 0$$

Grupując wyrażenie alebraiczne po lewej stronie równania otrzymujemy kolejno

$$(x^2 - 1^2) - 4 \cdot (x + 1) = (x - 1) \cdot (x + 1) - 4 \cdot (x + 1) = (x + 1) \cdot (x - 5) = 0$$

Stąd $x_1 = 1, \; x_2 = 5$

Przykład 3.13. *Sprowadzić równanie*

$$x + \sqrt{2 \cdot x - 1} = 2$$

do postaci ogólnej równania kwadratowego, następnie rozwiązać to równanie.
Metoda analizy starożytnych
Liczba podpierwiastkowa spełnia warunek: $x \geq \frac{1}{2}$. *Przenosząc* x *na prawą stronę równania otrzymujemy:*

$$\sqrt{2 \cdot x - 1} = 2 - x$$

Podnosząc równanie obustronnie do potęgi drugiej otrzymujemy:

$$2 \cdot x - 1 = (2 - x)^2$$

Korzystając ze wzoru na kwadrat røżnicy otrzymujemy

$$2 \cdot x - 1 = 4 - 4 \cdot x + x^2$$

Zatem równanie kwadratowe ma postać

$$x^2 - 6 \cdot x + 5 = 0$$

Ze wzoru na kwadrat różnicy mamy

$$(x-3)^2-4=0 \Rightarrow x-3=\pm 2$$

Zatem równanie ma dwa pierwiastki należące do dziedziny $x_1=1$ *i* $x_2=5$
Podstawmy te pierwiastki do równania wyjściowego:

$$5+\sqrt{2\cdot 5-1}=5+\sqrt{9}=5+3=8\neq 2$$

zatem liczba 5 *nie jest rozwiązaniem tego równania.*
Z drugiej strony

$$1+\sqrt{2\cdot 1-1}=1+\sqrt{1}=1+1=2$$

więc tylko liczba 1 *jest rozwiązaniem tego równania.*

Przykład 3.14. *Rozwiązać równanie postaci:*

$$\sqrt{4\cdot x+2}+\sqrt{4\cdot x-2}=4$$

Stosując ***metodę analizy starożytnych*** *podnosimy równanie obustronnie do potęgi i drugiej otrzymujemy*

$$4\cdot x+2+4\cdot x-2+2\cdot\sqrt{(4\cdot x+2)\cdot(4\cdot x-2)}=16$$

na podstawie wzoru na kwadrat sumy.Upraszczając dalej otrzymujemy

$$2\cdot\sqrt{(4\cdot x+2)\cdot(4\cdot x-2)}=16-8\cdot x$$

Dzieląc równanie obustronnie przez 2 *i stosując do wyrażenia podpierwiastkowego wzór na różnicę kwadratów mamy*

$$\sqrt{16\cdot x^2-4}=8-4\cdot x\Rightarrow\sqrt{4\cdot x^2-1}=4-2\cdot x$$

Podnosząc obustronnie do potęgi 2 *ostatnie równanie otrzymujemy*

$$4\cdot x^2-1=(4-2\cdot x)^2$$

Ze wzoru na kwadrat różnicy zastosowanego do prawej strony równania

$$4\cdot x^2-1=16-16\cdot x+4\cdot x^2$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy zatem równanie liniowe postaci

$$16\cdot x=17\Rightarrow x=\frac{17}{16}$$

Z równania wyjściowego wynika założenie: $x\geq\frac{1}{2}$ *i liczba* $\frac{17}{16}$
spełnia to założenie. Okazuje się, że liczba ta spełnia też równanie wyjściowe:

$$\sqrt{4\cdot\frac{17}{16}+2}+\sqrt{4\cdot\frac{17}{16}-2}=\sqrt{\frac{25}{4}}+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Przykład 3.15. *Rozwiązać równanie:*

$$x^2 - 6 \cdot x + 9 = 25$$

Ze wzoru na kwadrat różnicy otrzymujemy:

$$(x-3)^2 = 25 \Rightarrow x - 3 = \pm 5 \Rightarrow x_1 = -2, \;\; x_2 = 8$$

Przykład 3.16. *Rozwiązać równanie:*

$$x^2 + 6 \cdot x + 4 = 20$$

Sprowadzając do postaci ogólnej to równanie mamy

$$x^2 + 6 \cdot x - 16 = 0$$

Ponieważ $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 36 + 64 = 100 = 10^2 > 0$ *więc równanie to ma dokladnie dwa pierwiastki rzeczywiste liczone ze wzoru:*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-6 \pm 10}{2} = -3 \pm 5 = \{-8, 2\}$$

Przykład 3.17. *Rozwiązać równanie:*

$$2 \cdot x^2 + x - 1 = 0$$

Dzielniki wyrazu wolnego to $\{-1, 1\}$.
Dla $x = -1$ *mamy* $2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$, *więc* $x = -1$ *jest rozwiązaniem tego równania.Dzieląc wielomian* $2 \cdot x^2 + x - 1$ *przez dwumian* $x + 1$ *bez reszty otrzymujemy dwumian* $2 \cdot x - 1$, *więc równanie kwadratowe możemy zapisać w postaci*

$$(x + 1) \cdot (2 \cdot x - 1) = 0$$

Zatem równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki $x_1 = -1$ *i* $x_2 = \frac{1}{2}$

Przykład 3.18. *Dwaj korektorzy, pracując razem, są w stanie dokonać poprawek w tekście w czasie* 8 *godzin. Jeżeli każdy z nich wykonywałby tę pracę sam, to pierwszy, bardziej doświadczony korektor, zakończyłby ją o* 12 *godzin wcześniej niż drugi. W ciągu ilu godzin każdy z korektorów wykonałby tę pracę samodzielnie?*
Niech
x – *oznacza liczbę stron książki,*
y – *czas pracy pierwszego korektora,*
$y + 12$ – *czas pracy drugiego korektora.*
Wówczas tempo pracy wynosi
$\frac{x}{y}$ – *dla pierwszego korektora,*
$\frac{x}{y+12}$ – *dla drugiego korektora.*

Z analizy treści zadania wynika równanie postaci:

$$x = 8 \cdot \frac{x}{y} + 8 \cdot \frac{x}{y + 12}$$

Dzieląc obustronnie przezb $8 \cdot x$ *otrzymamy równanie*

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y+12}$$

Mnożąc to równanie obustronnie przez wyrażenie $8 \cdot y \cdot (y+12)$ *mamy*

$$y \cdot (y+12) = 8 \cdot (y+12) + 8 \cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 + 12 \cdot y = 8 \cdot y + 96 + 8 \cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 - 4 \cdot y - 96 = 0$$

Rozwiążmy to równanie metodą dopełniania do kwadratu. Korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy otrzymujemy:

$$(y-2)^2 - 100 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 100 \Rightarrow y - 2 = \pm 10$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = -8 & \textit{odpada bo } y < 0 \\ y_2 = 12 & \textit{pasuje, bo } y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Zatem pierwszy korektor powinien sam pracować 12 *godzin, a drugi dokładnie 24 godziny, bo* $12 + 12 = 24$.

Literatura

[1] Z. Bobiński i P. Nodzyński: Liga zadaniowa
Agencja Wydawniczo-Reklamowa „CZARNY KRUK", Bydgoszcz 1994